Vorlesungsnotizen zu „Angewandte Stochastik I“ an der Uni Ulm

Jonas Otto

Sommersemester 2020

Inhaltsverzeichnis

Kapitel 1

Einleitung

Zentrales Objekt der Stochastik ist das **Zufallsexperiment**: Dies ist ein Experiment, bei dem mehrere Ergebnisse eintreten können. Es ist nicht vorhersagbar, welches Ergebnis eintritt.

Beispiele sind Münzwurf, oder das Werfen eines Würfels. Die Ergebnisse sind hier Kopf/Zahl respektive die Zahlen 1 bis 6. Ein Zufallsexperiment hat keine **deterministische Regelmäßigkeit**: Wiederholungen eines Zufallsexperiments können verschiedene Ergebnisse haben. Ein Zufallsexperiment hat aber eine **statistische Regelmäßigkeit**: Relative Häufigkeiten der einzelnen Ergebnisse stabilisieren sich nach vielen Wiederholungen. Beim 1000-facher Wiederholung des Münzwurfs zum Beispiel ist die **relative Häufigkeit**

$$= \frac{\text{Anzahl von Kopf}}{1000} \approx \frac{500}{1000} = \frac{1}{2}$$

Die statistische Regelmäßigkeit ermöglicht es, Vorhersagen bestimmter Art zu machen: Beim 1000-fachen Münzwurf wird Kopf mindestens 450 Mal auftreten mit Wahrscheinlichkeit 99.8%.

Kapitel 2

Wahrscheinlichkeitsräume

Ziel dieses Abschnittes ist die Mathematische Modellierung von Zufallsexperimenten

2.1 Ergebnisraum Omega

Der Ergebnisraum Ω ist die Menge aller möglichen Ergebnisse ω des Zufallsexperimentes.

Beispiel Eine Münze wird geworfen. $\Omega = \{K, Z\}$ (Kopf, Zahl), oder auch $\Omega = \{0, 1\}$.

Beispiel Ein Würfel wird geworfen. $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

Beispiel Anzahl täglicher Bestellungen eines Artikels: $\Omega = \{0, 1, 2, \dots\} = \mathbb{N}_0$

Beispiel Temperatur am Schwörmontag an der Ulmer Adenauerbrücke: $\Omega = [-50, 50]$ oder $\Omega = \mathbb{R}$

Beachte:

- Bei der Wahl des Ergebnisraums gibt es kein „richtig" oder „falsch". Das Ziel ist, einen einfachen aber adäquaten Raum zu wählen.
- Der Ergebnisraum kann unterschiedliche Kardinalität haben (in den Beispielen: endlich, abzählbar unendlich, überabzählbar unendlich).

2.2 Ereignisse

Motivation: Oft ist nicht das tatsächliche Ergebnis des Experiments interessant, sondern nur ob das Ergebnis in eine vorgegebene Menge von Ergebnissen A fällt.

Beispiel: Würfeln Augenzahl ist gerade: $A = \{2, 4, 6\}$

Beispiel: Anzahl täglicher Bestellungen Vorrat von 100 Artikeln wird nicht überschritten: $A = \{0, 1, 2, \ldots, 100\}$.

Beispiel: Temperatur Temperatur beträgt über 25°: $A = [25, 50]$ (falls $\Omega = [-50, 50]$) oder $A = [25, \infty)$ (falls $\Omega = \mathbb{R}$)

Diese Teilmengen$A$ von Ω, denen Wahrscheinlichkeiten zugeordnet werden sollen, heißen **Ereignisse**. Man sagt „Das Ergebnis A tritt ein“, falls das Ergebbnis ω des Zufallexperimentes in dieser Menge A liegt (d.h. $\omega \in A$). Mittels Mengenoperationen können Ereignisse zu neuen Ereignissen verknüpft werden.

- $A \cup B$: Ereignis A oder Ereignis B tritt ein.
- $A \cap B$: Ereignis A und Ereignis B treten ein.
- $A \setminus B$: Ereignis A, nicht aber Ereignis B tritt ein.
- $A^{\complement} = \Omega \setminus A$: Ereignis A tritt nicht ein.
- $\bigcup\limits_{i=1}^{\infty} A_i$: Mindestens eines der Ereignisse $A_1, A_2, \ldots$ tritt ein.
- $\bigcap\limits_{i=1}^{\infty} A_i$: Alle Ereignisse $A_1, A_2, \ldots$ treten ein.

Beispiel Münze wird zwei Mal geworfen.
$\Omega = \{KK, KZ, ZK, ZZ\}$
Sei A_1 das Ereignis „Im ersten Wurf fällt Kopf“ und
sei A_2 das Ereignis „Im zweiten Wurf fällt Kopf“. Dann gilt
$A_1 = \{KK, KZ\}$, $A_2 = \{KK, ZK\}$.
Die Menge $A_1 \cup A_2 = \{KK, KZ, ZK\}$ ist das Ereignis „Es fällt mindestens ein Mal Kopf“.
Die Menge $A_1 \cap A_2 = \{KK\}$ ist das Ereignis „Es fällt zwei Mal Kopf“.

2.3 Sigma-Algebra

Welchen Teilmengen A von Ω sollen Wahrscheinlichkeiten $P(A)$ zugeordnet werden? Ideal wäre: man definiert $P(A)$ für alle $A \subset \Omega$, das heißt für alle $A \in \mathbb{P}(\Omega) := \{B : B \subset \Omega\}$, die Potenzmenge von Ω. Das geht, falls Ω endlich oder anzählbar ist. Es ist aber im Allgemeinen nicht möglich (z.B. falls $\Omega = \mathbb{R}$). Deswegen beschränkt man sich auf ein Teilsystem $\Sigma \subseteq \mathbb{P}(\Omega)$ von Ereignissen.

Forderungen an Σ: Mengenoperationen mit Ereignissen liefern wieder Ereignisse.

Definition 2.3.1. Sei $\Omega \neq \emptyset$ eine beliebige Menge. Eine Menge $\Sigma \subseteq \mathbb{P}(\Omega)$ heißt eine σ-Algebra, falls

1. $\Omega \in \Sigma$
2. Falls $A \in \Sigma$, dann gilt $A^{\complement} \in \Sigma$

3. Falls $A_1, A_2, \dots \in \Sigma$, dann gilt: $\bigcup\limits_{i=1}^{\infty} A_i \in \Sigma$

Die Elemente der σ-Algebra heißen **Ereignis**. Es folgt, dass $\emptyset$ ein Element jeder σ-Algebra ist. Dieses Ereignis heißt **unmögliches Ereignis** und tritt nie ein. Es folgt, dass **endliche Vereinigungen von Ereignissen** auch Ereignisse sind.

Beispiel: Münzwurf $\Omega = \{K, Z\}$. Die Mengen
$\Sigma_1 = \{\Omega, \emptyset\}$ und
$\Sigma_2 = \{\Omega, \emptyset, \{K\}, \{Z\}\} = \mathbb{P}(\Omega)$ sind σ-Algebren.
Die σ-Algebra Σ_1 heißt die **triviale σ-Algebra**.
Beachte: $K \notin \Sigma_2$, aber $\{K\} \in \Sigma_2$, Ergebnisse sind **keine** Ereignisse!

Beispiel: $\Omega = \{1, 2, 3\}$
Dann sind die Mengen
$\Sigma_1 = \{\Omega, \emptyset\}$,
$\Sigma_2 = \{\Omega, \emptyset, \{1\}, \{2, 3\}\}$,
$\Sigma_3 = \{\Omega, \emptyset, \{2\}, \{1, 3\}\}$,
$\Sigma_4 = \{\Omega, \emptyset, \{3\}, \{1, 2\}\}$,
$\Sigma_5 = \{\Omega, \emptyset, \{1\}, \{2\}, \{2, 3\}, \{1, 3\}, \{1, 2\}, \{3\}\} = \mathbb{P}(\Omega)$ σ-Algebren

Theorem 2.3.1. *Für jede σ-Algebra Σ gilt*

1. $\emptyset \in \Sigma$
2. *falls $A, B \in \Sigma$ dann gilt: $A \cup B, A \cap B, A \setminus B \in \Sigma$*
3. *falls $A_1, A_2, \dots \in \Sigma$, dann gilt $\bigcap\limits_{i=1}^{\infty} A_i \in \Sigma$*

2.4 Wahrscheinlichkeiten

Wir definieren $P(A)$ für alle $A \in \Sigma$.

Definition 2.4.1 (Disjunkte Mengen)**.** Mengen A, B heißen disjunkt, falls $A \cap B = \emptyset$
Mengen $A_1, A_2, \dots$ heißen paarweise disjunkt (p.d.) falls für alle $i \neq j$ gilt $A_i \cap A_j = \emptyset$

Idee: P soll folgende Eigenschaften haben:

1. Für alle $A \in \Sigma$ gilt: $0 \leq P(A) \leq 1$
2. $P(\Omega) = 1$ und $P(\emptyset) = 0$
3. $P(A^{\complement}) = 1 - P(A)$ für alle $A \in \Sigma$
4. falls $A, B \in \Sigma$ disjunkt sind, so gilt $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$.
5. falls $A_1, A_2, \dots \in \Sigma$ p.d., so gilt $P(\bigcup\limits_{i=1}^{\infty} A_i) = \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i)$

Das motiviert folgende Definition

Definition 2.4.2 (Wahrscheinlichkeitsmaß)**.** Sei $\Omega \neq \emptyset$ und Σ eine σ-Algebra auf Ω. Eine Abbildung $P : \Sigma \to [0,1]$ heißt Wahrscheinlichkeitsmaß (W-Maß) auf Σ falls

1. $P(\Omega) = 1$
2. Sind $A_1, A_2, \dots \in \Sigma$ paarweise disjunkt, dann gilt $P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i)$ (σ-Additivität)

Das Tripel (Ω, Σ, P) heißt **Wahrscheinlichkeitsraum** (W-Raum).

2.5 Beispiele zum Wahrscheinlichkeitsraum

2.5.1 Münzwurf

Modellierung durch den Wahrscheinlichkeitsraum (Ω, Σ, P) mit
$\Omega = \{K, Z\}$,
$\Sigma = \mathbb{P}(\Omega) = \{\Omega, \emptyset, \{K\}, \{Z\}\}$
$P : \Sigma \to [0,1]$ mit
$P(\Omega) = 1, P(\emptyset) = 0, P(\{K\}) = 0.5, P(\{Z\}) = 0.5$

2.5.2 Würfeln

Modellierung durch den Wahrscheinlichkeitsraum (Ω, Σ, P) mit
$\Omega = \{1, 2, \dots, 6\}$
$\Sigma = \mathbb{P}(\Omega)$
$P : \Sigma \to [0,1]$ mit
$P(\Omega) = 1, P(\emptyset) = 0,$
$P(\{1\}) = \frac{1}{6}, P(\{2\}) = \frac{1}{6}, \dots$
$P(\{1,2\}) = \frac{1}{3}, P(\{1,2,3\}) = \frac{1}{2}$
Also kann man kürzer schreiben $P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|}$, mit $|A|$ der Anzahl der Elemente in A (Kardinalität von A).

2.5.3 Geschlecht von Neugeborenen

Modellierung durch den Wahrscheinlichkeitsraum (Ω, Σ, P) mit
$\Omega = \{W, M\}$
$\Sigma = \mathbb{P}(\Omega\}$
$P : \Sigma \to [0,1]$ mit
$P(\Omega) = 1, P(\emptyset) = 0$
$P(\{W\}) = p, P(\{M\}) = 1 - p$, wobei $p \in [0,1]$.
Wahl von p: länderspezifisch auf Basis relativer Häufigkeiten, z.B. für Deutschland $p = 0.4863$ (1970-1999).

2.6 Eigenschaften von W-Maßen

Theorem 2.6.1 (Eigenschaften von W-Maßen)**.** *Sei (Ω, Σ, P) ein W-Raum, und seien $A, B, A_1, A_2, \dots \in \Sigma$.*

1. *Ist $A \subseteq B$, so gilt $P(B) = P(A) + P(B \backslash A)$ und $P(A) \leq P(B)$ (Monotonie)*

2. $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

3. $P\left(\cup_{i=1}^{\infty} A_i\right) \leq \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i)$ *(σ-Subadditivität)*

2.7 Endliche Wahrscheinlichkeitsräume

In diesem Abschnitt: Ω ist endlich, d.h. $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n\}$ für ein $n \in \mathbb{N}$. In diesem Fall kann man $\Sigma = \mathbb{P}(\Omega)$ wählen. Ferner ist ein W-Maß P bereits durch die Werte $p_i = P(\{\omega_i\}), i = 1, \dots, n$ von Elementarereignissen $\{\omega_i\}$ eindeutig bestimmt.

Definition 2.7.1 (Endlicher W-Raum)**.** Ein W-Raum (Ω, Σ, P) heißt **endlicher W-Raum**, falls Ω endlich ist und $\Sigma = \mathbb{P}(\Omega)$ gilt.

Beachte: Sei (Ω, Σ, P) ein endlicher W-Raum. Im Allgemeinen ist es nicht der Fall, dass alle Elementarereignisse gleichwahrscheinlich sind.

Laplace W-Räume Ein besonders einfacher Fall liegt dann vor, wenn alle Elementarereignisse $\{\omega_i\}$ gleichwahrscheinlich sind.

Definition 2.7.2 (Laplace-W-Raum)**.** Ein endlicher W-Raum (Ω, Σ, P) und $p_i = P(\{\omega_i\}) = \frac{1}{|\Omega|} = \frac{1}{n}$ für alle $i = 1, \dots, n$ heißt **Laplace-W-Raum**. Das W-Maß P heißt **diskrete Gleichverteilung**. Man schreibt $P = U(\Omega)$ (*uniform*). Ein Zufallsexperiment, welches durch einen Laplace-Raum bechrieben ist, nennt man ein Laplace-Experiment.

Sei (Ω, Σ, P) ein Laplace W-Raum. Es folgt:

$$P(A) = \sum_{\omega_i \in A} P(\{\omega_i\}) = \sum_{\omega_i \in A} \frac{1}{|\Omega|} = \frac{|A|}{|\Omega|}$$

Die Bestimmung der Kardinalitäten von Ω und A kann nichttrivial sein.

Theorem 2.7.1. *Seien $A_1, \dots, A_n$ endliche Mengen und $A = \{(a_1, \dots, a_n) : a_1 \in A_1, \dots, a_n \in A_n\} = A_1 \times \dots \times A_n$. Dann gilt $|A| = |A_1| \cdot |A_2| \cdots |A_n|$*

2.7.1 Urnenmodelle

- Urne mit n Kugeln, welche nummeriert sind mit $1, \dots, n$.
- Zufälliges Ziehen von k Kugeln

Das Ergebnis ist ein Vektor $(\omega_1, \dots, \omega_k)$ wobei ein Element jeweils die Nummer einer Kugel ist.

Verschiedene Arten von Ziehungen

1. Mit Zurücklegen (z.B Ergebnis $(1, 1, 2, 2)$ möglich)
   Ohne Zurücklegen (z.B. Ergebnis $(1, 1, 2, 2)$ nicht möglich)
2. Mit Beachten der Reihenfolge
   Ohne Beachten der Reihenfolge

$\Longrightarrow$ Insgesamt 4 mögliche Fälle.

Fall 1: Mit Zurücklegen und mit Beachtung der Reihenfolge

Die Menge aller Ergebnisse ist

$$\begin{aligned}\Omega_1 &= \{(\omega_1, \dots, \omega_k) : \omega_1, \dots, \omega_k \in \{1, \dots, n\}\} \\ &= \{1, \dots, n\}^k\end{aligned}$$

Für die Kardinalität der Menge gilt

$$|\Omega_1| = n^k$$

Fall 2: Ohne Zurücklegen, mit Beachtung der Reihenfolge

$\Longrightarrow\ k \leq n$.
Menge aller Ergebnisse:

$$\Omega_2 = \{(\omega_1, \dots, \omega_k) : \omega_1, \dots, \omega_k \in \{1, \dots, n\} \text{ und } \omega_i \neq \omega_j \text{ für } i \neq j\}$$

Es gilt:

$$|\Omega_2| = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdots (n-k+1) = \frac{n!}{(n-k)!}$$

Insbesondere gilt für $n = k$: $|\Omega_2| = n!$.

Fall 3: Ohne Zurücklegen, ohne Beachtung der Reihenfolge

$\Longrightarrow\ k \leq n$.
Vorgehen: Erst Beachten der Reihenfolge, dann sortieren der Vektoren in aufsteigender Reihenfolge.

$$\Omega_3 = \{(\omega_1, \dots, \omega_k) : 1 \leq \omega_1 < \omega_2 < \dots < \omega_k \leq k\}$$

$$|\Omega_3| = \frac{|\Omega_2|}{k!} = \frac{n!}{(n-k)! \cdot k!} = \binom{n}{k}$$

Fall 4: Mit Zurücklegen, ohne Beachtung der Reihenfolge

Analog zu Fall 3:

$$\Omega_4 = \{(\omega_1, \dots, \omega_k) : 1 \leq \omega_1 \leq \omega_2 \leq \dots \leq \omega_k \leq k\}$$

Die Kardinalität ist (ohne Beweis):

$$|\Omega_4| = \binom{n+k-1}{k}$$

2.7.2 Weitere W-Maße in endlichen W-Räumen

Hypergeometrische Verteilung

Darstellung im Urnenmodell: Die Urne enthält n Kugeln, davon sind B blau, und $n - B$ weiß. Dabei ist $B \in \{0, \dots, n\}$. Es werden k Kugeln gezogen, ohne Zurücklegen und ohne beachten der Reihenfolge.

Es soll nun für $b \in \{0, \dots, k\}$ die Wahrscheinlichkeit berechnet werden für das Ereignis $A_b =$ „genau b der gezogenen Kugeln sind blau“.

Dazu wird das Experiment mit einen Laplace Raum modelliert, mit

$$\Omega = \{(\omega_1, \dots, \omega_k) : 1 \leq \omega_1 < \omega_2 < \dots < \omega_k \leq n\}$$

(analog zu Urnenmodell, Fall 3). ω ist dabei die Nummer einer Kugel. Da es sich um einen Laplace Raum handelt, gilt

$$P(A_b) = \frac{|A_b|}{|\Omega|}$$

, und aus dem Urnenmodell ergibt sich

$$|\Omega| = \binom{n}{k}$$

. Nun muss die Kardinalität $|A_b|$ bestimmt werden. Für die Fälle „mehr blaue Kugeln als in der Urne vorhanden“ und „mehr weiße Kugeln als in der Urne vorhanden“, kann bereits festgestellt werden:

$$|A_b| = \begin{cases} 0 & \text{falls } b > B \\ 0 & \text{falls } b - k > n - B(\iff b < k - (n - B)) \end{cases}$$

In allen anderen Fällen gilt

$$|A_b| = \underbrace{\binom{B}{b}}_{\text{Anzahl an Möglichkeiten für } b \text{ blaue Kugeln}} \cdot \overbrace{\binom{n-B}{k-b}}^{\text{Anzahl an Möglichkeiten für } k-b \text{ weiße Kugeln}}$$

Damit folgt:

$$P(A_b) = \begin{cases} 0 & \text{falls } b > B \text{ oder } b < k - (n - B) \\ \frac{\binom{B}{b}\binom{n-B}{k-b}}{\binom{n}{k}} & \text{sonst} \end{cases}$$

Das gleiche Experiment kann auch anders modelliert werden:

$$\Omega = \{0, \dots, k\}, \Sigma = \mathbb{P}(\Omega)$$

$$P(\{b\}) = \begin{cases} 0 & \text{falls } b > B \text{ oder } b < k - (n - B) \\ \frac{\binom{B}{b}\binom{n-B}{k-b}}{\binom{n}{k}} & \text{sonst} \end{cases}$$

$$P(A) = \sum_{b \in A} P(\{b\})$$

Dieses W-Maß heißt **Hypergeometrische Verteilung** mit Parametern n, B, k. Man schreibt $P = H(n, B, k)$.

Bernoulli Verteilung

Hier sind die einzig möglichen Ergebnisse „Erfolg“ und „Misserfolg“: $\Omega = \{0, 1\}$, $\Sigma = P(\Omega)$. Die Erfolgswahrscheinlichkeit ist gegeben durch $p \in [0, 1]$:

$$\begin{aligned} P(\{1\}) &= p \\ P(\{0\}) &= 1 - p \\ P(\emptyset) &= 0 \\ P(\Omega) &= 1 \end{aligned}$$

Dieses Wahrscheinlichkeitsmaß heißt Bernoulli Verteilung mit Parameter p. Man schreibt $P = B(1, p)$.

Binomial Verteilung

Hier wird das Experiment der Bernoulli Verteilung n-malig wiederholt. Modellierung durch den W-Raum (Ω, Σ, P) mit:

$$\begin{aligned} \Omega &= \{(\omega_1, \dots, \omega_n) : \omega_1, \dots, \omega_n \in \{0, 1\}\} = \{0, 1\}^n \\ \Sigma &= P(\Omega) \\ P(\{\omega\}) = P(\{(\omega_1, \dots, \omega_n)\}) &= p^k \cdot (1 - p)^{n-k} \end{aligned}$$

Wobei $k = \sum_{i=1}^n \omega_i$ die Anzahl der Erfolge ist.

$$P(A) = \sum_{\omega \in A} P(\{\omega\}),\ A \in \Sigma$$

Betrachtet wird das Ereignis $A_k =$ „genau k Erfolge“ mit $k \in \{0, \dots, n\}$. Es gilt:

$$\begin{aligned} P(A_k) &= \sum_{\omega \in A_k} P(\{\omega\}) \\ &= \sum_{\omega \in A_k} p^k (1 - p)^{n-k} \\ &= \binom{n}{k} \cdot p^k \cdot (1 - p)^{n-k} \end{aligned}$$

Modellierung mit anderem W-Raum:

$$\begin{aligned} \Omega &= \{0, 1, \dots, n\} \\ \Sigma &= P(\Omega) \\ P(\{k\}) &= \binom{n}{k} \cdot p^k \cdot (1 - p)^{n-k} \\ P(A) &= \sum_{k \in A} P(\{k\}),\ A \in \Sigma \end{aligned}$$

Hier ist das Ereignis nicht mehr der Vektor mit Resultaten, sondern direkt die Anzahl an Erfolgen. Dieses W-Maß heißt Binomialverteilung mit Parametern n und p. Man schreibt $P = B(n, p)$.

2.8 Diskrete Wahrscheinlichkeitsräume

Bisher war Ω endlich. In diesem Abschnitt soll Ω abzählbar unendlich sein, d.h. $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \dots\}$, $\omega_i \neq \omega_j$ für $i \neq j$.

2.8.1 Poisson Verteilung

$\Omega = \mathbb{N}_0$, $\Sigma = P(\Omega)$

$$\begin{aligned} P(\{k\}) &= \frac{\lambda^k}{k!} \cdot e^{-\lambda},\ k \in \mathbb{N}_0,\ \lambda > 0 \\ P(A) &= \sum_{k \in A} P(\{k\}),\ A \in \Sigma \end{aligned}$$

Mit der Reihenentwicklung der Exponentialfunktion lässt sich zeigen dass $P(\Omega) = 1$. P heißt Poissonverteilung mit Parameter $\lambda > 0$: $P = P(\lambda)$

Theorem 2.8.1 (Poisson Approximation)**.** *Sei $p_1, p_2, \dots$ eine Folge mit $p_j \in [0,1]$ für $j \in \mathbb{N}$ und $n \cdot p_n \xrightarrow[n\to\infty]{} \lambda > 0$. Dann gilt*

$$B(n, p_n)(\{k\}) \xrightarrow[n\to\infty]{} P(\lambda)(\{k\})$$

für alle $k \in \mathbb{N}_0$. D.h.

$$\binom{n}{k} \cdot p_n^k \cdot (1-p_n)^{n-k} \xrightarrow[n\to\infty]{} \frac{\lambda^k}{k!} \cdot e^{-\lambda}$$

Das heißt die Poissonverteilung taucht auf, wenn viele Versuche mit kleiner Erfolgswahrscheinlichkeit durchgeführt werden, d.h. falls n groß und p klein ist.

2.8.2 Geometrische Verteilung

Hier wird ein Zufallsexperiment so oft durchgeführt, bis das erste mal das Ergebnis „Erfolg“ auftritt.

$$\begin{aligned} \Omega &= \mathbb{N} \\ \Sigma &= P(\Omega) \\ P(\{k\}) &= (1-p)^{k-1} \cdot p,\ k \in \mathbb{N} \\ P(A) &= \sum_{k \in A} P(\{k\}),\ A \in \Sigma \end{aligned}$$

Man schreibt $P = G(p)$ für eine geometrische Verteilung mit Erfolgswahrscheinlichkeit $p \in (0,1]$.

2.9 Stetige W-Räume

In diesem Abschnitt wählen wir $\Omega = .\mathbb{R}$ In Fällen, in denen es intuitiv wäre, als Ergebnisraum ein Intervall zu wählen, werden wir trotzdem $\Omega = .\mathbb{R}$ wählen, und das Intervall durch passendes W-Maß modellieren.

Wie sehen hier nun Ω und P aus?

2.9.1 Auswahl von Sigma

$\Sigma = P(\Omega)$ ist nicht mehr möglich. $P(\mathbb{R})$ enthält viele pathologische Ereignisse, also ist $\Sigma = P(\mathbb{R})$ zu groß! Statdessen wird eine kleinere σ-Algebra gewählt.

Definition 2.9.1 (Borel-σ-Algebra)**.** Die kleinste σ-Algebra auf $\mathbb{R}$, die alle Intervalle $[a, b]$ mit $a < b$ enthält, heißt die Borel-σ-Algebra und wird mit $B(\mathbb{R})$ bezeichnet.

„Kleinste“ bedeutet: Für alle σ-Algebren Σ auf $\mathbb{R}$, die alle Intervalle $[a, b]$ mit $a < b$ enthält, gilt: $B(\mathbb{R}) \subseteq \Sigma$.

Bemerkungen

- $B(\mathbb{R})$ enthält alle „relevanten“ Teilmengen von $\mathbb{R}$, sowie die Mengen $[a, b]$, $[a, b)$, $(-\infty, b]$, $\{a\}$ usw. für $a \leq b$.
- $B(\mathbb{R}) \neq P(\mathbb{R})$

2.9.2 Definition von P

Idee

- Aus der Folge $p_1, p_2, \ldots$ wird eine Funktion $p : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$
- Aus der Summe ($P(A) = \sum_{\omega_i \in A} p_i$) wird ein Integral

Definition 2.9.2 (Wahrscheinlichkeitsdichte)**.** Eine Funktion $p : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ heißt Wahrscheinlichkeitsdichte (Dichte), falls

1. $p(x) \geq 0 \ \ \forall x \in \mathbb{R}$
2. $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} p(x)\ dx = 1$

Idee: Definiere P so, dass für alle $[a, b]$ mit $a \leq b$ gilt:

$$P([a, b]) = \int_a^b p(x)dx$$

Theorem 2.9.1. *Sei $p : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine Dichte. Es existiert genau ein W-Maß P auf $B(\mathbb{R})$ mit $P([a, b]) = \displaystyle\int_a^b p(x)dx$ für alle $a \leq b$.*

Definition 2.9.3. Sei $p : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine Dichte und sei P ein W-Maß auf $B(\mathbb{R})$ mit $P([a, b]) = \displaystyle\int_a^b p(x)dx$ für alle $a \leq b$. Dann heißt P **absolut stetig** mit Dichte p. Man sagt: P besitzt Dichte p.

Theorem 2.9.2. *Sei P absolut stetig mit Dichte p. Dann gilt:*

1. $P(\{a\}) = 0 \ \forall a \in \mathbb{R}$
2. $P([a, b]) = P((a, b)) = P((a, b]) = P([a, b)) = \displaystyle\int_a^b p(x)dx$

Beachte: Theorem 2.9.2 liefgert, dass P nicht eindeutig durch die Werte $P(\{a\})$, $a \in \mathbb{R}$ definiert ist. Es folgt aus Theorem 2.9.1, dass P duch die Dichte p eindeutig bestimmt ist.

Es folgen einige wichtige absolut stetige W-Maße.

2.9.3 Stetige Gleichverteilung

Seien $a < b$ und

$$p(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a} & , x \in [a, b] \\ 0 & , sonst \end{cases}$$

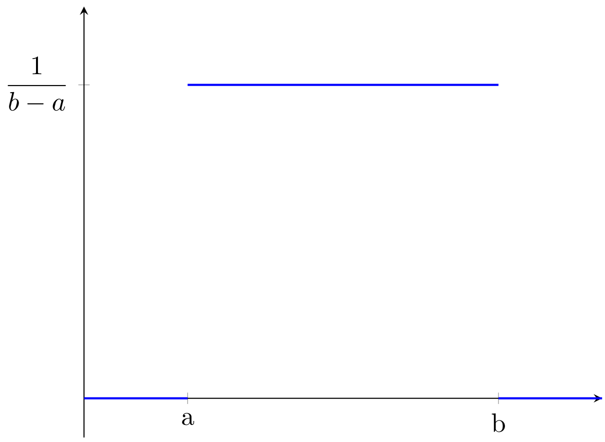

Abbildung 2.1: Stetige Gleichverteilung, Wahrscheinlichkeitsdichte

Besitzt P Dichte p, so nennt man P **Stetige Gleichverteilung** auf $[a, b]$. Man schreibt $P = U([a, b])$.

2.9.4 Exponentialverteilung

Sei $\lambda > 0$ und

$$p(x) = \begin{cases} 0 & , fallsx < 0 \\ \lambda e^{-\lambda x} & , fallsx \geq 0 \end{cases}$$

Dann ist p eine Dichte, da

1. $p(x) > 0 \;\; \forall x \in \mathbb{R}$
2. $\int p(x)dx = \lambda \int e^{-\lambda x}dx = \lambda \left[-e^{-\lambda x} \cdot \frac{1}{\lambda}\right]_0^\infty = 1$

Besitzt P die Dichte p, so nennt man P Exponentialverteilung mit Parameter $\lambda > 0$. Man schreibt $P = \text{Exp}(\lambda)$.

Bemerkung

- Eigenschaft der „Gedächtnislosigkeit“ ($\rightarrow$ später)
- Geeignet zur Modellierung von Lebensdauern und Wartezeiten

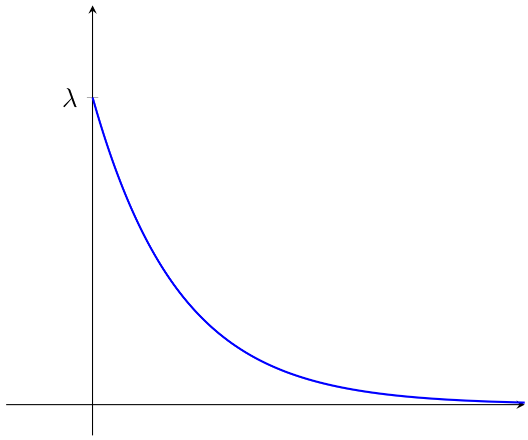

Abbildung 2.2: Exponentialverteilung, Wahrscheinlichkeitsdichte

2.9.5 Normalverteilung

Für $\mu \in \mathbb{R}$ und $\sigma^2 > 0$ setze

$$p(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left(\frac{-(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right) \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

Beachte Auch hier gilt $\int p(x)dx = 1$ und $p(x) > 0$, p ist also eine Dichte.

Besitzt P Dichte p, so nennt man P die Normalverteilung mit Parametern μ und σ^2. $P = N(\mu, \sigma^2)$.

Falls $\mu = 0$ und $\sigma^2 = 1$ gilt $p(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(\frac{-x^2}{2}\right) \forall x \in \mathbb{R}$. Man nennt $P = N(0,1)$ die **Standardnormalverteilung**.

Beachte

1. $N(0,1)$ spielt eine zentrale Rolle in der Stochastik, siehe der zentrale Grenzwertsatz ($\rightarrow$ später)
2. Man verwendet die Normalverteilung oft zur Modellierung von Messfehlern, Blattlängen, Blutdruckwerten, Temperaturen, etc.

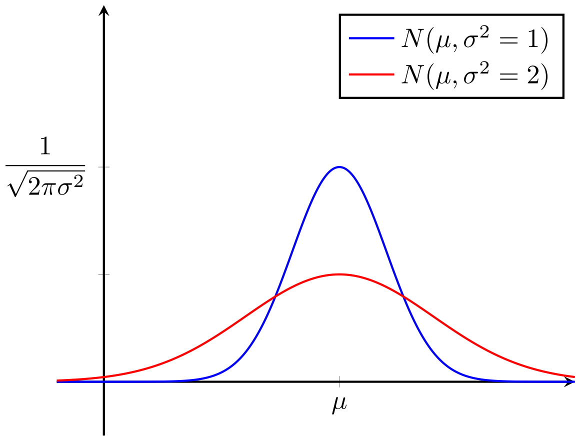

Abbildung 2.3: Normalverteilung, Wahrscheinlichkeitsdichte

2.10 Bedingte Wahrscheinlichkeiten

Die bedingte Wahrscheinlichkeit von A gegeben B ist definiert als

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} \tag{2.1}$$

Theorem 2.10.1 (Totale Wahrscheinlichkeit, Satz von Bayes)**.** *Sei* (Ω, Σ, P) *ein W-Raum und seien* $B_1, \dots, B_n \in \Sigma$ *paarweise disjunkt mit* $P(B_i) > 0$ *für* $i = 1, \dots, n$ *und* $B_1 \cup \dots \cup B_n = \Omega$

1. *Satz von der totalen Wahrscheinlichkeit:*
   Für alle $A \in \Sigma$ *gilt:*

$$P(A) = \sum P(A|B_i) \cdot P(B_i)$$

2. *Satz von Bayes:*
   Für alle $A \in \Sigma$ *mit* $P(A) > 0$ *und alle* $i = 1, \dots, n$ *gilt:*

$$P(B_i|A) = \frac{P(A|B_i)P(B_i)}{P(A)} = \frac{P(A|B_i)P(B_i)}{\sum_j P(A|B_j) \cdot P(B_j)}$$

Beachte: Für $A, B \in \Sigma$ gilt mit $P(B) > 0$:

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{P(B) - P(A^{\complement} \cap B)}{P(B)} = 1 - P(A^{\complement}|B)$$

2.11 Unabhängigkeit

Sei (Ω, Σ, P) ein W-Raum und $A, B \in \Sigma$ mit $P(A), P(B) > 0$.

Idee: Unabhängigkeit von A und B soll bedeuten, dass das Eintreten von A (bzw B) keinen Einfluss auf $P(A)$ (bzw $P(B)$) hat, d.h.

$$P(A|B) \overset{\text{def}}{=} \frac{P(A \cap B)}{P(B)} \overset{!}{=} P(A)$$

$$P(B|A) \overset{\text{def}}{=} \frac{P(B \cap A)}{P(A)} \overset{!}{=} P(B)$$

also muss

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$$

gelten.

Definition 2.11.1 (Unabhängigkeit)**.** Sei (Ω, Σ, P) ein W-Raum und $A, B \in \Sigma$. Dann heißen A und B **unabhängig**, falls gilt:

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B) \tag{2.2}$$

Definition 2.11.2 (Unabhängigkeit mehrerer Ereignisse)**.** Sei (Ω, Σ, P) ein W-Raum und $A_1, A_2, \ldots, A_n \in \Sigma$. Dann heißen $A_1, A_2, \ldots, A_n$

1. paarweise unabhängig, falls A_i und A_j unabhängig sind für alle $i \neq j$.
2. unabhängig, falls für alle $T \subseteq \{1, \ldots, n\}$ mit $|T| \geq 2$ gilt:

$$P\left(\bigcap_{i \in T} A_i\right) = \prod_{i \in T} P\left(A_i\right)$$

Bemerkung: Unabhängigkeit impliziert paarweise Unabhängigkeit. Umgekehrt nicht!

Kapitel 3

Zufallsvariablen

3.1 Zufallsvariablen

Bei einem Zufallsexperiment (Ω, Σ, P) interessiert man sich oft nicht für das Ergebnis $\omega \in \Omega$ sondern für eine Kennzahl $X(\omega)$, die von ω abhängt.

Beispiel: n-maliges Würfeln.
$\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}^n = \{\omega = (\omega_1, \ldots, \omega_n) : \omega_i \in \{1, \ldots, 6\} \; \forall i = 1, \ldots, n \}$
Mögliche Kennzahlen $X(\omega)$ wären:

$$X(\omega) = \min \omega_k$$
$$X(\omega) = \max \omega_k$$
$$X(\omega) = \sum \omega_k$$

Definition 3.1.1 (Zufallsvariable)**.** Sei (Ω, Σ, P) ein W-Raum und $X : \Omega \to \mathbb{R}$ eine Abbildung. X heißt Zufallsvariable, falls für alle $B \in B(\mathbb{R})$ gilt:

$$\underbrace{\{\omega \in \Omega : X(\omega) \in B\}}_{\subset \Omega} \in \Sigma$$

Bemerkungen

1. Zufallsvariablen sind Abbildungen
2. Die Aussage aus Definition 3.1.1 muss hier nicht überprüft werden. Alle im folgenden auftauchenden Abbildungen sind Zufallsvariablen.
3. Wir schreiben $\{X \in B\}$ für das Ereignis $\{\omega \in \Omega : X(\omega) \in B\}$.

Definition 3.1.2 (Verteilung einer Zufallsvariable)**.** Sei $X : \Omega \to \mathbb{R}$ eine Zufallsvariable und (Ω, Σ, P) ein W-Raum. Dann heißt das W-Maß $P_X : B(\mathbb{R}) \to [0, 1]$ mit $P_X(B) = P(\{X \in B\}) = P(\{\omega \in \Omega : X(\omega) \in B\})$, $B \in B(\mathbb{R})$, die **Verteilung** von X.

Übung: Angeben von Verteilung mit Bsp

Beachte: X bildet den ursprünglichen W-Raum in einen neuen ab:

$$(\Omega, \Sigma, P) \xrightarrow{X} (\mathbb{R}, B(\mathbb{R}), P_X)$$

3.1.1 Diskrete Verteilungen

Definition 3.1.3 (Diskrete Zufallsvariablen)**.**

1. Eine Zufallsvariable heißt diskret, falls eine Menge $D \subset \mathbb{R}$ existiert, die höchstens abzählbar ist mit $P(\{X \in D\}) = 1$.
2. Sei X diskret. Die Menge $D_X = \{x \in \mathbb{R} : P(\{X \in D\}) > 0\}$ heißt der **Träger** von X.
   Beachte: Es gilt $P(\{X \in D_X\}) = 1$.

1. X heißt **Bernoulli** verteilt mit Parameter $p \in [0,1]$, falls gilt:

$$\begin{aligned} P(\{X = 1\}) &= p \\ P(\{X = 0\}) &= 1 - p \end{aligned}$$

   In diesem Fall gilt: $P(\{X \in \underbrace{\{0,1\}}_{=D}\}) = p + (1-p) = 1$ Ferner gilt:

$$D_X = \begin{cases} \{0,1\} & \text{, falls } p \in (0,1) \\ \{0\} & \text{, falls } p = 0 \\ \{1\} & \text{, falls } p = 1 \end{cases}$$

   Wir schreiben:

$$X \sim B(1,p)$$

2. X heißt **Gleichverteilt** auf G, für $G \subset \mathbb{R}$, $G \neq \emptyset$ und endlich, falls

$$P(\{X = x\}) = \frac{1}{|G|} \; \forall x \in G$$

   Wir schreiben:

$$X \sim U(G)$$

3. X heißt **hypergeometrisch** verteilt mit Parametern

$$\begin{aligned} n &\in \mathbb{N} && \textit{Anzahl Kugeln} \\ B &\in \{0, \ldots, n\} && \textit{blaue Kugeln} \\ k &\in \{1, \ldots, n\} && \textit{gezogene Kugeln} \end{aligned}$$

   wenn gilt:

$$P(\{X = b\}) = \frac{\binom{B}{b}\binom{n-B}{k-b}}{\binom{n}{k}}$$

   Wir schreiben:

$$X \sim H(n, B, k)$$

4. X heißt **Poissonverteilt** mit Parameter $\lambda > 0$, falls gilt:

$$P(\{X = k\}) = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda} \quad \forall k \in \mathbb{N}_0$$

   Wir schreiben:

$$X \sim P(\lambda)$$

5. X heißt **geometrisch** verteilt mit Parameter $p \in (0, 1]$, falls

$$P(\{X = k\}) = p(1-p)^{k-1} \quad \forall k \in \mathbb{N}$$

   Wir schreiben:

$$X \sim G(p)$$

3.1.2 Absolut stetige Verteilungen

Definition 3.1.4 (Absolut stetige Verteilung)**.** Eine Zufallsvariable X heißt absolut stetig verteilt, falls P_X absolut stetig ist, d.h. P_X besitzt eine Dichte.

Wir führen folgende Sprech- und Schreibweisen ein: Sei X eine Zufallsvariable.

1. X heißt **gleichverteilt** auf $[a, b]$ mit $a < b$ falls

$$P_X = U([a, b])$$

   Man schreibt

$$X \sim U([a, b])$$

2. X heißt **exponentialverteilt** mit Parameter $\lambda > 0$ falls

$$P_X = \operatorname{Exp}(\lambda)$$

   Man schreibt

$$X \sim \operatorname{Exp}(\lambda)$$

3. X heißt **normalverteilt** mit Parametern $\mu \in \mathbb{R}$ und $\sigma^2 > 0$ falls

$$P_X = N(\mu, \sigma^2)$$

   Man schreibt

$$X \sim N(\mu, \sigma^2)$$

3.1.3 Verteilungsfunktion

Definition 3.1.5 (Verteilungsfunktion)**.** Ist X eine Zufallsvariable auf (Ω, Σ, P), dann ist die Verteilungsfunktion $F_X : \mathbb{R} \to [0, 1]$ von X gegeben durch

$$F_X(t) = P(\{X \leq t\})$$

Verteilungsfunktion einer diskreten Zufallsvariable

$$F_X(t) = \sum_{k=0}^{t} P(\{X = k\})$$

$P(\{X = k\})$ ist die **Zähldichte** von X.

Zähldichte: Tut 3

Verteilungsfunktion einer absolut stetigen Zufallsvariable

$$F_X(t) = \int_{-\infty}^{t} p(x)dx$$

$p(x)$ ist die **Wahrscheinlichkeitsdichte** von X.

Eigenschaften der Verteilungsfunktion

- F_X ist monoton wachsend
- Grenzwerte:

$$\lim_{t \to -\infty} F_X(t) = 0$$
$$\lim_{t \to \infty} F_X(t) = 1$$

- F_X ist rechtsseitig stetig:

$$\lim_{t_n \uparrow t} F_X(t_n) = F_X(t)$$

- Für jedes $t \in \mathbb{R}$ existiert der linksseitige Grenzwert:

$$F_X(t-) = \lim_{t_n \downarrow t} F_X(t_n)$$

- Es gilt:

$$P(\{X = t\}) = F_X(t) - F_X(-t)$$

- Für $a < b$ gilt:

$$P(\{X \in [a, b]\}) = \int_{a}^{b} p(x)dx$$

- Die Verteilung einer Zufallsvariable ist eindeutig durch ihre Verteilungsfunktion bestimmt.

3.1.4 Beispiele

Definition einer Zufallsvariable

In Übungsblatt 6 wurde die Aufgabe gestellt: "Modellieren Sie das Zufallsexperiment durch Angabe eines geeigneten Wahrscheinlichkeitsraumes und definieren Sie X"

Der W-Raum kann unabhängig von der Zufallsvariablen durch Betrachten des Experiments aufgestellt werden. Das Beispiel hier ist das 3-malige Drehen eines Glücksrads, mit gleichen Wahrscheinlichkeiten. Es wird ein Laplace Raum mit $\Omega = \{1, 2, 3\}^3$ angegeben. Σ als Potenzmenge und $P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|}$ folgt aus der Tatsache dass es sich um einen Laplace Raum handelt.

Für $X : \Omega \to \mathbb{R}$ genügt es, eine Vorschrift $X(\omega)$, hier $X(\omega) = \omega_1 \cdot \omega_2 \cdot \omega_3$ mit $\omega = (\omega_1, \omega_2, \omega_3)$, anzugeben.