Grundlagen der Rechnerarchitektur
Übungsblatt 5
Gruppe 121

Jonas Otto   Dominik Authaler

7. Februar 2020

Aufgabe 1

Die Schaltalgebra ist eine spezielle Form der Boolschen Algebra. Während bei einer Boolschen Algebra nur festgelegt ist, dass sie auf einer bestimmten Trägermenge und mit bestimmten Operationen aufgebaut ist, sind diese in der Schaltalgebra genauer spezifiziert. Die Trägermenge der Schaltalgebra ist 0, 1 und die Operationen sind so gewählt, dass sie mittels Schaltungselementen realisiert werden können.

Aufgabe 2

a)

$$\begin{aligned} g(x1, x2) &= \overline{\overline{x_1 \cdot x_2} \cdot x_1} \\ &\overset{P8}{=} (x_1 \cdot x_2) + \overline{x_1} \\ &\overset{P4'}{=} (x_1 + \overline{x_1}) \cdot (x_2 \cdot \overline{x_1}) \\ &\overset{P9'}{=} 1 \cdot (x_2 \cdot \overline{x_1}) \\ &\overset{P5}{=} x_2 \cdot \overline{x_1} \end{aligned} \tag{1}$$

b)

$$\begin{aligned} h(x_1, x_2, x_3, x_4) &= (x_1 \cdot x_2) + (x_1 \cdot x_3) + x_1 \cdot (x_2 + x_3 \cdot x_4) + x_1 \\ &\overset{P4}{=} x_1 \cdot (x_2 + x_3) + x_1 \cdot (x_2 + x_3 \cdot x_4) + x_1 \\ &\overset{P4}{=} x_1 \cdot ((x_2 + x_3) + (x_2 + x_3 \cdot x_4) + 1) \\ &\overset{P2', P6'}{=} x_1 \cdot (x_2 + x_3 + x_2 + x_3 \cdot x_4) \\ &\overset{P3'}{=} x_1 \cdot (x_2 + x_3 + x_3 \cdot x_4) \\ &\overset{P11'}{=} x_1 \cdot (x_2 + x_3) \end{aligned} \tag{2}$$

c)

$$\begin{aligned} k(x_1, x_2, x_3) &= ((x_1 + x_3 \cdot (x_2 + x_3)) \cdot 1) \cdot 1 \\ &\overset{P5}{=} x_1 + x_3 \cdot (x_2 + x_3) \\ &\overset{P11'}{=} x_1 + x_3 \end{aligned} \tag{3}$$

Aufgabe 3

Die zu beweisenden Aussagen dieser Aufgabe sind auch als *De Morgan'sche Regeln* bekannt.

a)

$$\begin{aligned} &\overline{a+b} \overset{!}{=} \overline{a} \cdot \overline{b} \\ \overset{P9,P9'}{\Longleftrightarrow}\ &\overline{a} \cdot \overline{b} + \overline{\overline{a+b}} = 1 \wedge \overline{a} \cdot \overline{b} \cdot (\overline{\overline{a+b}}) = 0 \end{aligned} \tag{4}$$

$$\begin{aligned} \overset{P9'}{\Longleftrightarrow} && \overline{a} \cdot \overline{b} + \overline{\overline{a+b}} = 1 \\ \overset{P7}{\Longleftrightarrow} && \overline{a} \cdot \overline{b} + (a+b) = 1 \\ \overset{P2'}{\Longleftrightarrow} && \overline{a} \cdot \overline{b} + a + b = 1 \\ \overset{KleinerKonsens}{\Longleftrightarrow} && a + \overline{b} + b = 1 \\ \overset{P9'}{\Longleftrightarrow} && a + 1 = 1 \\ \overset{P6'}{\Longleftrightarrow} && 1 = 1 \end{aligned} \tag{5}$$

$$\begin{aligned} \overset{P9'}{\Longleftrightarrow} && \overline{a} \cdot \overline{b} \cdot (\overline{\overline{a+b}}) = 0 \\ \overset{P7}{\Longleftrightarrow} && \overline{a} \cdot \overline{b} \cdot (a+b) = 1 \\ \overset{P4}{\Longleftrightarrow} && \overline{a} \cdot (\overline{b} \cdot a + \overline{b} \cdot b) = 0 \\ \overset{P9}{\Longleftrightarrow} && \overline{a} \cdot (\overline{b} \cdot a + 0) = 0 \\ \overset{P5'}{\Longleftrightarrow} && \overline{b} \cdot (\overline{a} \cdot a) = 0 \\ \overset{P9}{\Longleftrightarrow} && \overline{b} \cdot 0 = 0 \\ \overset{P6}{\Longleftrightarrow} && 0 = 0 \end{aligned} \tag{6}$$

b)

$$
\begin{aligned}
\overline{a \cdot b} &\overset{!}{=} \overline{a} + \overline{b} \\
\overset{P9,P9'}{\iff} \overline{a} + \overline{b} + \overline{\overline{a \cdot b}} &= 1 \wedge \overline{a} + \overline{b} \cdot (\overline{\overline{a \cdot b}}) = 0
\end{aligned} \tag{7}
$$

$$
\begin{aligned}
\overset{P9}{\iff} \quad & (\overline{a} + \overline{b}) + \overline{\overline{a \cdot b}} = 1 \\
\overset{P7}{\iff} \quad & (\overline{a} + \overline{b}) + a \cdot b = 1 \\
\overset{P2'}{\iff} \quad & \overline{b} + \overline{a} + a \cdot b = 1 \\
\overset{KleinerKonsens}{\iff} \quad & \overline{b} + \overline{a} + b = 1 \\
\overset{P9'}{\iff} \quad & 1 + \overline{a} = 1 \\
\overset{P6'}{\iff} \quad & 1 = 1
\end{aligned} \tag{8}
$$

$$
\begin{aligned}
\overset{P9}{\iff} \quad & (\overline{a} + \overline{b}) \cdot \overline{\overline{a \cdot b}} = 0 \\
\overset{P7}{\iff} \quad & (\overline{a} + \overline{b}) \cdot a \cdot b = 0 \\
\overset{P4'}{\iff} \quad & (\overline{a} \cdot a + \overline{b} \cdot a) \cdot b = 0 \\
\overset{P9}{\iff} \quad & (0 + \overline{b} \cdot a) \cdot b = 0 \\
\overset{P5'}{\iff} \quad & (\overline{b} \cdot b) \cdot a = 0 \\
\overset{P9}{\iff} \quad & 0 \cdot a = 0 \\
\overset{P6}{\iff} \quad & 0 = 0
\end{aligned} \tag{9}
$$

Aufgabe 4

$$
\begin{aligned}
&\overline{\overline{(x_1 \cdot \overline{(x_2 \cdot x_2)})} \cdot \overline{((\overline{(x_1 \cdot x_1)} \cdot x_2)}} \\
\overset{P8}{=}\ & (x_1 \cdot \overline{(x_2 \cdot x_2)}) + ((\overline{(x_1 \cdot x_1)} \cdot x_2) \\
\overset{P3}{=}\ & (x_1 \cdot \overline{x_2}) + (\overline{x_1} \cdot x_2)
\end{aligned} \tag{10}
$$

Aufgabe 5

a) i) Wahrheitstabelle:

x_2	x_1	x_0	$f(x_2, x_1, x_0)$
0	0	0	0
0	0	1	1
0	1	0	0
0	1	1	1
1	0	0	0
1	0	1	1
1	1	0	0
1	1	1	1

Abbildung 1: Wahrheitstabelle der Funktion $f(x_2, x_1, x_0)$

ii) Disjunktive kanonische Normalform:

$$f(x_2, x_1, x_0) = \overline{x_2}\,\overline{x_1}x_0 + \overline{x_2}x_1x_0 + x_2\overline{x_1}x_0 + x_2x_1x_0 \tag{11}$$

Konjunktive kanonische Normalform:

$$f(x_2, x_1, x_0) = (\overline{x_2}+\overline{x_1}+\overline{x_0})\cdot(\overline{x_2}+x_1+\overline{x_0})\cdot(x_2+\overline{x_1}+\overline{x_0})\cdot(x_2+x_1+\overline{x_0}) \tag{12}$$

iii)

$$\begin{aligned} f(x_2, x_1, x_0) &= \overline{x_2}\,\overline{x_1}x_0 + \overline{x_2}x_1x_0 + x_2\overline{x_1}x_0 + x_2x_1x_0 \\ &\overset{P4}{=} x_0 \cdot (\overline{x_2}\,\overline{x_1} + \overline{x_2}x_1 + x_2\overline{x_1} + x_2x_1) \\ &\overset{P1'}{=} x_0 \cdot (\overline{x_2}\,\overline{x_1} + x_2x_1 + \overline{x_2}x_1 + x_2\overline{x_1}) \\ &\overset{P2'}{=} x_0 \cdot ((\overline{x_2}\,\overline{x_1} + x_2x_1) + (\overline{x_2}x_1 + x_2\overline{x_1})) \\ &\overset{P9'}{=} x_0 \cdot (1+1) \\ &\overset{P6'}{=} x_0 \cdot 1 \\ &\overset{P5}{=} x_0 \end{aligned} \tag{13}$$

b) i)

$$\begin{aligned} f(x_1, x_2, x_3) &= x_2 \\ &= (\overline{x_1} + \overline{x_2} + \overline{x_3}) \cdot (\overline{x_1} + \overline{x_2} + x_3) \cdot (x_1 + \overline{x_2} + \overline{x_3}) \cdot (x_1 + \overline{x_2} + x_3) \end{aligned} \tag{14}$$

ii)

$$\begin{aligned} f(x_1, x_2, x_3) &= x_1 \cdot \overline{x_2} + \overline{x_1} \cdot x_3 \\ &= (\overline{x_1} + \overline{x_2} + \overline{x_3}) \cdot (\overline{x_1} + x_2 + \overline{x_3}) \cdot (x_1 + x_2 + \overline{x_3}) \cdot (x_1 + x_2 + x_3) \end{aligned} \tag{15}$$

Aufgabe 6

Die später verwendeten Beziehungen $\overline{a+a}=\overline{a}$ und $\overline{a\cdot a}=\overline{a}$ ergeben sich aus P3' bzw. P3.

a) $x_1 \oplus x_2$

(i) Mittels NOR:

$$\begin{aligned}
& x_1 \oplus x_2 \\
\stackrel{Definition}{=}\; & x_1 \cdot \overline{x_2} + \overline{x_1} \cdot x_2 \\
\stackrel{P7}{=}\; & \overline{\overline{x_1 \cdot \overline{x_2}}} + \overline{\overline{\overline{x_1} \cdot x_2}} \\
\stackrel{P8}{=}\; & \overline{\overline{x_1} + x_2} + \overline{x_1 + \overline{x_2}} \\
\stackrel{\overline{a+a}=\overline{a}}{=}\; & \overline{\overline{x_1 + x_1} + x_2} + \overline{x_1 + \overline{x_2 + x_2}} \\
\stackrel{\overline{\overline{a}+\overline{a}}=a}{=}\; & \overline{\overline{\overline{\overline{x_1 + x_1} + x_2} + \overline{x_1 + \overline{x_2 + x_2}}} + \overline{\overline{\overline{x_1 + x_1} + x_2} + \overline{x_1 + \overline{x_2 + x_2}}}}
\end{aligned} \tag{16}$$

(ii) Mittels NAND:

$$\begin{aligned}
& x_1 \oplus x_2 \\
\stackrel{Definition}{=}\; & x_1 \cdot \overline{x_2} + \overline{x_1} \cdot x_2 \\
\stackrel{P7}{=}\; & \overline{\overline{x_1 \cdot \overline{x_2} + \overline{x_1} \cdot x_2}} \\
\stackrel{P8'}{=}\; & \overline{\overline{a \cdot \overline{b}} \cdot \overline{\overline{a} \cdot b}} \\
\stackrel{\overline{a}=\overline{a\cdot a}}{=}\; & \overline{\overline{a \cdot \overline{b \cdot b}} \cdot \overline{\overline{a \cdot a} \cdot b}}
\end{aligned} \tag{17}$$

b) $(x_1 \cdot \overline{x_2}) + (\overline{x_2} \cdot \overline{x_3}) + (x_3 \cdot \overline{x_0}) + (x_0 \cdot \overline{x_1})$

$$\begin{aligned}
& (x_1 \cdot \overline{x_2}) + (\overline{x_2} \cdot \overline{x_3}) + (x_3 \cdot \overline{x_0}) + (x_0 \cdot \overline{x_1}) \\
\stackrel{P7}{=}\; & \overline{\overline{(x_1 \cdot \overline{x_2}) + (\overline{x_2} \cdot \overline{x_3}) + (x_3 \cdot \overline{x_0}) + (x_0 \cdot \overline{x_1})}} \\
\stackrel{P2'}{=}\; & \overline{\overline{((x_1 \cdot \overline{x_2}) + (\overline{x_2} \cdot \overline{x_3})) + ((x_3 \cdot \overline{x_0}) + (x_0 \cdot \overline{x_1}))}} \\
\stackrel{P8'}{=}\; & \overline{\overline{((x_1 \cdot \overline{x_2}) + (\overline{x_2} \cdot \overline{x_3}))} \cdot \overline{((x_3 \cdot \overline{x_0}) + (x_0 \cdot \overline{x_1}))}} \\
\stackrel{P8'}{=}\; & \overline{\overline{(x_1 \cdot \overline{x_2})} \cdot \overline{(\overline{x_2} \cdot \overline{x_3})} \cdot \overline{(x_3 \cdot \overline{x_0})} \cdot \overline{(x_0 \cdot \overline{x_1})}} \\
\stackrel{\overline{a\cdot a}=\overline{a}}{=}\; & \overline{\overline{x_1 \cdot \overline{x_2 \cdot x_2}} \cdot \overline{\overline{x_2 \cdot x_2} \cdot \overline{x_3 \cdot x_3}} \cdot \overline{x_3 \cdot \overline{x_0 \cdot x_0}} \cdot \overline{x_0 \cdot \overline{x_1 \cdot x_1}}} \\
\stackrel{\overline{a\cdot 1}=\overline{a}}{=}\; & \overline{\overline{\overline{\overline{x_1 \cdot \overline{x_2 \cdot x_2}} \cdot \overline{\overline{x_2 \cdot x_2} \cdot \overline{x_3 \cdot x_3}}} \cdot 1} \cdot \overline{\overline{\overline{x_3 \cdot \overline{x_0 \cdot x_0}} \cdot \overline{x_0 \cdot \overline{x_1 \cdot x_1}}} \cdot 1}}
\end{aligned} \tag{18}$$